Berner Fachhochschule

Hochschule für
Technik und Informatik Burgdorf

Mathematik

Geometrie

Autor: Niklaus Burren
Datum: 7. September 2004

Inhalt

1. Matrizen und Determinanten

1.1. Definition

Unter einer reellen Matrix A von Typ (m, n) versteht man ein aus m mal n reellen Zahlen bestehendes rechteckiges Schema mit m waagrecht angeordneten Zeilen und n senkrecht angeordneten Spalten.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2. Determinanten

Determinante einer 2x2 Matrix:

$$\boxed{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Determinante einer 3x3 Matrix:

$$\boxed{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

Regel von Sarus

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right]\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
$$\begin{array}{ccccc} & & + & + & + \\ \end{array}$$

$$\det(\underline{a}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

1.3. Inverse einer Matrix

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \boxed{c_{ik} = \frac{(-1)^{i+k} \cdot \Delta(\underline{\hat{a}_{ki}})}{\Delta(a)}}$$

Δ = det

$\Delta(\underline{\hat{a}_{ki}})$: Nebendeterminante der Stelle (k,i)

$\Delta(a)$: Determinante der Matrix $\underline{a}$

c_{ik}: Wert der inversen Matrix an der Stelle (k,i)

Beispiel:

$$c_{32} = \frac{(-1)^5 \cdot \Delta\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}}{\Delta(\underline{a})}$$

1.4. Cramerregel

Ein Gleichungssystem heisst regulär wenn m = n und die Hauptdeterminante $D = \det(\underline{a}) \neq 0$ ist.

$$\boxed{x_k = \frac{1}{\det(\underline{a})} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} a & b_1 & a \\ a & \dots & a \\ a & b_n & a \end{bmatrix}\right)}$$

k-te Spalte von $\underline{a}$ durch $\underline{b}$ ersetzt.

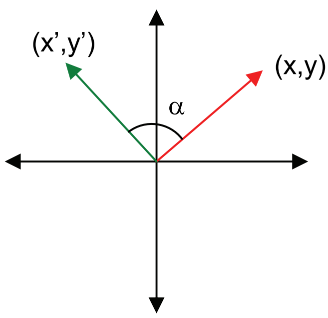
$\underline{a} \cdot \underline{x} = \underline{b}$

Hauptdeterminante $D \neq 0$: Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}; \qquad y = \frac{D_y}{d}; \qquad ....}$$

$D = 0$	$D_x \neq 0$	$D_y \neq 0$:	keine Lösung
$D = 0$	$D_x = 0$	$D_y = 0$:	beliebig viele Lösungen

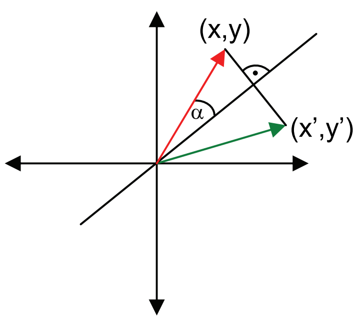
1.5. Drehungen



Drehung um den Nullpunkt mit Drehwinkel α.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}_{\text{Drehmatrix } D_\alpha} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

1.6. Spiegelungen

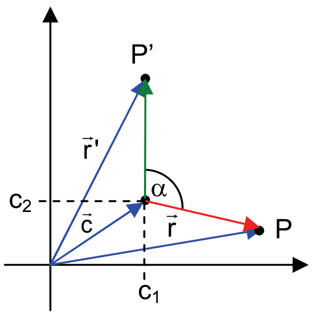


Spiegelung von Vektoren an der Geraden durch 0 mit Winkel α.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}}_{\text{Spiegelmatrix } S_\alpha} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

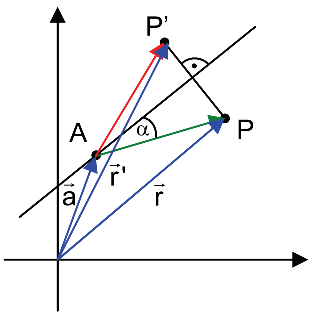
1.7. Drehung und Spiegelng von Punkten

Drehung:



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}\,' &= \vec{c} + D_\alpha(\vec{r} - \vec{c}) \\ \vec{r}\,' &= \vec{c} - D_\alpha \cdot \vec{c} + D_\alpha \cdot \vec{r}\end{aligned}}$$

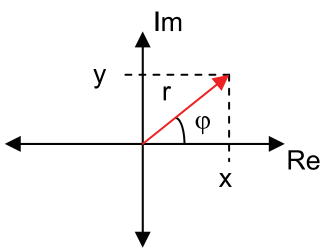
Spiegelung:



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}\,' &= \vec{a} + S_\alpha(\vec{r} - \vec{a}) \\ \vec{r}\,' &= (\underline{1}_{2x2} - S_\alpha)\cdot \vec{a} + S_\alpha \cdot \vec{r}\end{aligned}}$$

2. Komplexe Zahlen

2.1. Definition



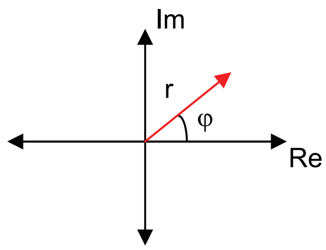
$$\boxed{z = x + yj}$$

j: Imaginäre Einheit mit $j^2 = -1$
x: Realteil von z (Re(z) = x)
y: Imaginärteil von z (Im(z) = y)

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

2.2. Polarformen

Trigonometrische Form:



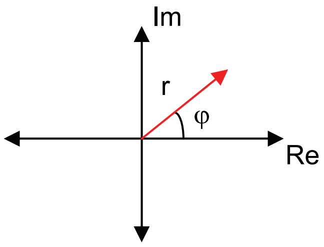
$$\boxed{z = r\left(\cos(\varphi) + j\cdot\sin(\varphi)\right)}$$

r: Betrag von z (r = |z|)
φ: Argument (Winkel) von z

Konjugiert komplexe Zahl:

$$\boxed{z^* = r\left(\cos(\varphi) - j\cdot\sin(\varphi)\right)}$$

Exponentialform:



$$\boxed{z = r \cdot e^{j \cdot \varphi}}$$

r: Betrag von z (r = |z|)
φ: Argument (Winkel) von z

Konjugiert komplexe Zahl:

$$\boxed{z^* = r \cdot e^{-j \cdot \varphi}}$$

2.3. Eulersche Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} e^{j \cdot \varphi} &= \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot j = \angle\varphi \\ e^{-j \cdot \varphi} &= \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot j = \angle -\varphi \end{aligned}}$$

2.4. Potenzieren

Eine in der Polarform vorliegende komplexe Zahl wird in die n-te Potenz erhoben indem man ihren Betrag r in die n-te Potenz erhebt und ihr Argument φ mit dem Exponenten n multipliziert.

$$\boxed{\begin{aligned} z^n &= \left(r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))\right)^n = r^n \cdot \left(\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)\right) \\ z^n &= \left(r \cdot e^{j \cdot \varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{j \cdot n \cdot \varphi} \\ z^n &= r\angle\varphi = r^n \angle n \cdot \varphi \end{aligned}}$$

2.5. Radizieren

Die Gleichung $z^n = a$ hat genau n-Lösungen:

$$z^n = a$$

$$z = \sqrt[n]{|a|} \angle \frac{1}{n} \cdot \arg(a) + k \cdot \frac{2\pi}{n}$$

2.6. Natürlicher Logarithmus

Der natürliche Logarithmus einer komplexen Zahl:

$$\boxed{\ln(z) = \ln(r) + j \cdot (\varphi + k \cdot 2\pi) \qquad (k \in Z)}$$

Beispiel:

$$z = 3 + 4j = 5 \cdot e^{j \cdot 0.9273}$$

$$\ln(z) = \ln(5) + j \cdot (0.9273 + k \cdot 2\pi) = 1.6094 + j \cdot (0.9273 + k \cdot 2\pi)$$

Hauptwert (k = 0): $\ln(z) = \ln(3 + 4j) = \underline{\underline{1.6094 + 0.9273j}}$

2.7. Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten und negativer Diskriminante hat als Lösung ein Paar von zueinander konjugierten komplexen Zahlen:

$$\text{Falls } D = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{\underbrace{(4ac - b^2)}_{>0}(-1)}$$

$$= \underbrace{\sqrt{4ac - b^2}}_{\in R_+} \cdot j$$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot j}$$

2.8. Fundamentalsatz der Algebra

Wenn c eine Nullstelle des reellen Polynoms P dann ist auch c* (konjugiert) Nullstelle:

$$(z - c)(z - c^*) = z^2 - \underbrace{(c + c^*)}_{\in R} \cdot z + \underbrace{c \cdot c^*}_{\in R}$$

= quadratisches reelles Polynom mit negativer Diskriminante, weil es keine reellen Nullstellen hat.

3. Trigonometrie

3.1. Winkelfunktionen

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	undef.
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	0	-1	0

3.2. Beziehungen zwischen sin(α), cos(α) und tan(α)

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1} \qquad \boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \qquad \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \tan(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

3.3. Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

3.4. Funktion des doppelten Winkels

$$\sin(2\alpha)=2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=1-2\cdot\sin^2(\alpha)=2\cdot\cos^2(\alpha)-1$$

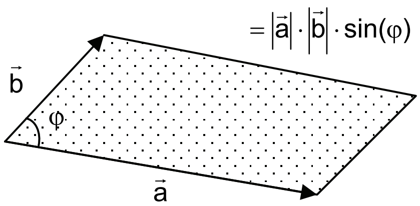
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\cdot\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

4. Vektorprodukt

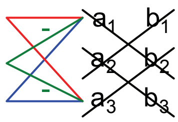
Gegeben zwei Vektoren $\vec a,\vec b$

$\vec a \times \vec b$ = Vektor $\begin{cases}\text{Betrag: Flächeninhalt des Parallelogramms}\\ \text{Richtung: Senkrecht auf Parallelogramm*}\end{cases}$

* in der Richtung, in welcher sich eine Rechtschraube bewegen würde, wenn sie so gedreht wird, dass $\vec a$ mit Drehwinkel < 180° in $\vec b$ übergeht.



$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\-a_1\cdot b_3+a_3\cdot b_1\\a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$



5. Harmonische Schwingungen

5.1. Definition

$$f(t)=A\cdot\cos(\omega t+\varphi)$$
$$f(t)=A\cdot\sin(\omega t+\psi)$$
$$f(t)=a\cdot\cos(\omega t)+b\cdot\sin(\omega t)$$

$$a = \overbrace{A\cdot\cos(\varphi)}^{\text{cos-Form}} = \overbrace{A\cdot\sin(\psi)}^{\text{sin-Form}}$$
$$b = -A\cdot\sin(\varphi) = A\cdot\cos(\psi)$$

$$A=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \tan(\psi)=\frac{a}{b} \qquad \tan(\varphi)=-\frac{b}{a}$$

5.2. Überlagerungsprinzip

Man addiert oder subtrahiert die Zeiger der beiden Schwingungen:

$$(a_1 \cdot \cos(\omega t) + b_1 \cdot \sin(\omega t)) \pm (a_2 \cdot \cos(\omega t) + b_2 \cdot \sin(\omega t))$$
$$= (a_1 \pm a_2) \cdot \cos(\omega t) + (b_1 \pm b_2) \cdot \sin(\omega t)$$

$$A_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t} \pm A_2 \cdot e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t}$$
$$= (A_1 \cdot e^{j\varphi_1} \pm A_2 \cdot e^{j\varphi_2}) \cdot e^{j\omega t}$$

6. Kegelschnitte

6.1. Definition

Kegelschnitte sind Ebene Kurven, die beim Schnitt eines geraden Kreiskegels mit Ebenen entstehen. Dazu gehören Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Jeder Kegelschnitt kann durch eine quadratische Koordinatengleichung dargestellt werden:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Verlaufen die Symmetrieachsen der Kegelschnitte nicht parallel zu den Koordinatenachsen, so enthält die Kegelgleichung ein gemischtes Glied (Bxy).

6.2. Quadratische Ergänzung

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$B = 0, \qquad A \neq 0, \qquad C \neq 0$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) = -F \qquad A\left(x^2 + \frac{D}{2A}x\right)^2 + C\left(y^2 + \frac{E}{2C}y\right)^2 = \underbrace{A \cdot \frac{D^2}{4A^2} + C \cdot \frac{E}{4C^2} - F}_{F'}$$

$$\boxed{\frac{\left(x^2 + \frac{D}{2A}x\right)^2}{\frac{F'}{A}} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}y\right)^2}{\frac{F'}{C}} = 1}$$

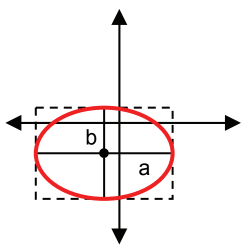
Falls F' $\neq$ 0:

Ellipse:

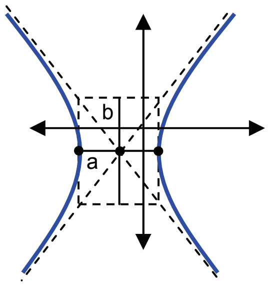
Wenn $\frac{F'}{A} > 0,\ \frac{F'}{C} > 0$: Ellipse mit Mittelpunkt $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$

Reelle Halbachse: $a = \sqrt{\frac{F'}{A}}$ || x-Achse

Imaginäre Halbachse: $b = \sqrt{\frac{F'}{C}}$ || y-Achse



Hyperbel (nach links und rechts geöffnet):



Wenn $\frac{F'}{A} > 0,\ \frac{F'}{C} < 0:$ Ellipse mit Mittelpunkt $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$

Reelle Halbachse: $a = \sqrt{\frac{F'}{A}}$ || x-Achse

Imaginäre Halbachse: $b = \sqrt{\left|\frac{F'}{C}\right|}$ || y-Achse

Hyperbel (nach unten und oben geöffnet):

Wenn $\frac{F'}{A} > 0,\ \frac{F'}{C} < 0:$ Ellipse mit Mittelpunkt $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$

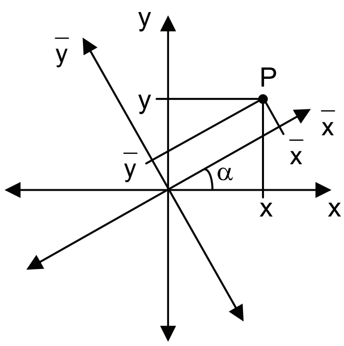
Reelle Halbachse: $b = \sqrt{\frac{F'}{C}}$ || y-Achse

Imaginäre Halbachse: $a = \sqrt{\frac{F'}{A}}$ || x-Achse

Falls $\frac{F'}{A} < 0,\ \frac{F'}{C} < 0:$ **Gleichung hat keine Lösung**

6.3. Kegelgleichungen mit gemischten Glied Bxy

Die Symmetrieachsen des Kegelschnitts verläuft nicht parallel zu den Koordinatenachsen.
In diesem Fall wird das Koordinatensystem so gedreht, dass das gemischte Glied Bxy verschwindet:



P um -α um 0 drehen

→ P' mit Koordinaten $(\bar{x}; \bar{y})$ im xy-System

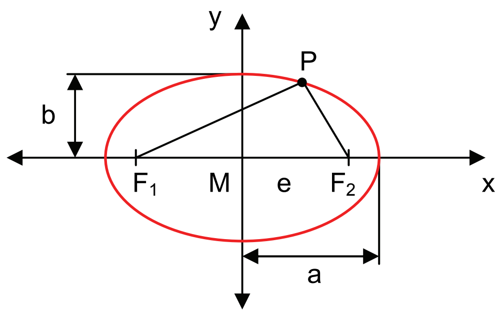
$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}}_{D_{-\alpha}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = D_\alpha \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \cos(\bar{x}) - \sin(\bar{y}) \\ y &= \sin(\bar{x}) + \cos(\bar{y}) \end{aligned}}$$

6.4. Ellipse

Geometrische Definition:



$$\boxed{\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \text{konst.} = 2a}$$

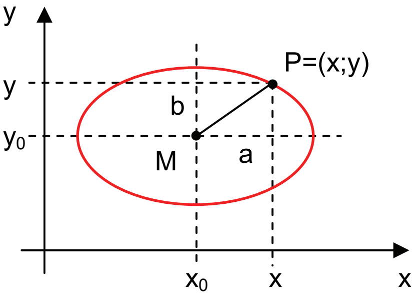
M: Mittelpunkt
F_1, F_2: Brennpunkte
2a: Grosse Achse (Hauptachse)
2b: Kleine Achse (Nebenachse)

e:	Brennweite $(\overline{F_1F_2} = 2e)$
	$e^2 = a^2 - b^2 \qquad (a > b > 0)$
$\varepsilon = e/a$:	Numerische Exzentrizität ($\varepsilon < 1$)

Spezialfall b > a:
Die Brennpunkte liegen jetzt auf der y-Achse (um 90° gedrehte Ellipse mit der Hauptachse 2b, der Nebenachse 2a und $e^2 = b^2 - a^2$).

Ellipse in allgemeiner Lage:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1} \qquad M = (x_0;\, y_0)$$



Tangente in $P_1 = (x_1;\, y_1)$:

$$\frac{(x-x_0)(x_1-x_0)}{a^2} + \frac{(y-y_0)(y_1-y_0)}{b^2} = 1$$

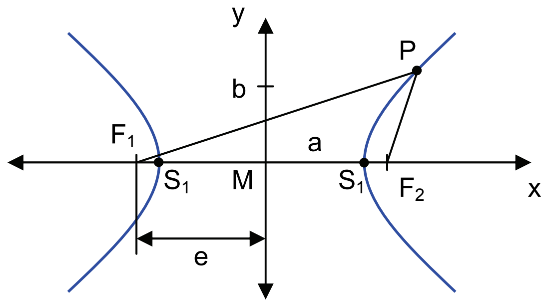
Parameterdarstellung:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + a\cdot\cos(t) \\ y &= y_0 + b\cdot\sin(t) \end{aligned} \qquad (0 \le t < 2\pi)}$$

6.5. Hyperbel

Geometrische Definition:

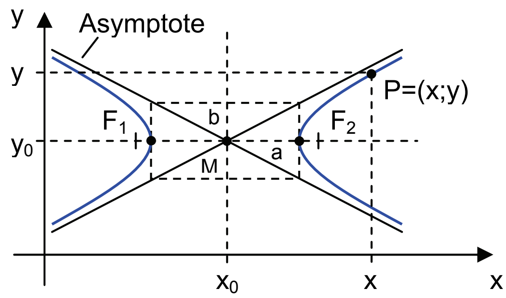
$$\boxed{\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \text{konst.} = 2a}$$



M:	Mittelpunkt
F_1, F_2:	Brennpunkte
S_1, S_2:	Scheitelpunkte
2a:	Grosse Achse (Hauptachse)
2b:	Kleine Achse (Nebenachse)
e:	Brennweite $(\overline{F_1F_2} = 2e)$
	$e^2 = a^2 - b^2 \qquad (a > b > 0)$
$\varepsilon = e/a$:	Numerische Exzentrizität ($\varepsilon < 1$)

Hyperbel in allgemeiner Lage:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1} \qquad M = (x_0;\, y_0)$$



Asymptoten: $\quad y = y_0 \pm \frac{b}{a}\cdot(x - x_0)$

Tangente in $P_1 = (x_1;\, y_1)$:

$$\frac{(x-x_0)(x_1-x_0)}{a^2} - \frac{(y-y_0)(y_1-y_0)}{b^2} = 1$$

Parameterdarstellung:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 \pm a \cdot \cosh(t) \\ y &= y_0 + b \cdot \sinh(t) \end{aligned} \quad (-\infty < t < \infty)} \qquad M = (x_0;\ y_0)$$

Oberes Vorzeichen: rechter Ast
Unteres Vorzeichen: linker Ast

Gleichung einer um 90° gedrehten Hyperbel

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1} \qquad M = (x_0;\ y_0)$$

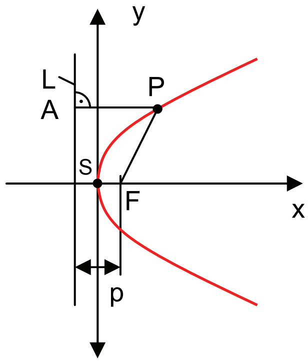
Grosse Achse 2a: y-Achse
Kleine Achse 2b: x-Achse

Asymptoten: $y = \pm\frac{a}{b}x$

6.6. Parabel

Geometrische Definition:

$$\boxed{\overline{AP} = \overline{FP}}$$

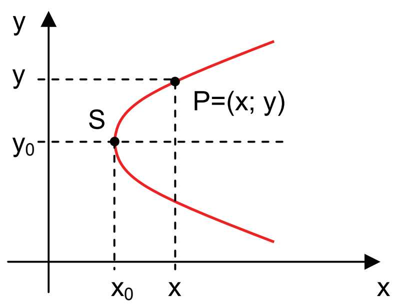


S: Scheitelpunkt
F: Brennpunkt
L: Leitlinie
p: Parameter (Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie $|p| = 2e$)
e: Brennweite $\left(\overline{SF} = e = \frac{|p|}{2}\right)$

$p > 0$: Öffnung nach rechts
$p < 0$: Öffnung nach links

Parabel in allgemeiner Lage:

$$\boxed{(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)} \qquad S = (x_0;\ y_0)$$



Symmetrieachse: Parallele zur x-Achse durch den Scheitelpunkt S

Tangente in $P_1 = (x_1;\ y_1)$:

$$(y-y_0)(y_1-y_0) = p(x+x_1-2x_0)$$

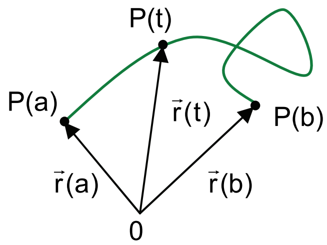
Parameterdarstellung:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + c \cdot t^2 \\ y &= y_0 + t \end{aligned} \quad (-\infty < t < \infty)} \qquad S = (x_0;\ y_0)$$

7. Kurvenlänge

Kurvenlänge zwischen P(a) und P(b):

$$\boxed{L(a,b) = \int_a^b \left|\vec{r}\,'(t)\right| \, dt}$$

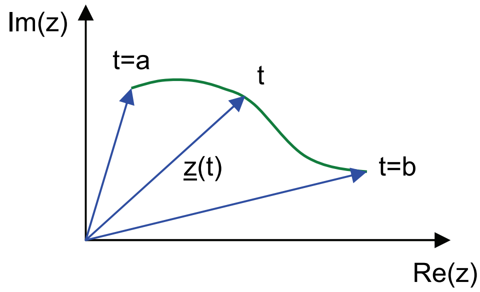


8. Ortskurven

8.1. Definition

Die von einem parameterabhängigen komplexen Zeiger $\underline{z} = \underline{z}(t)$ in der Gaussschen Zahlenebene beschriebene Bahn heisst Ortskurve.

$$\boxed{\underline{z}(t) = x(t) + j \cdot y(t) \qquad (a \le t \le b)}$$



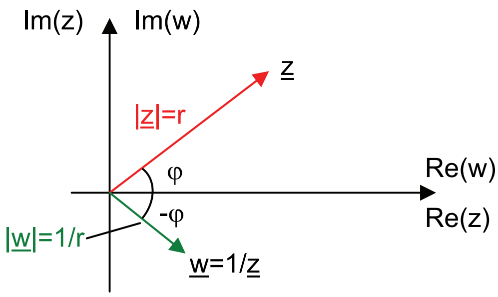
8.2. Inversion einer Ortskurve

Inversion einer komplexen Zahl:

Der Übergang von einer komplexen Zahl $z \neq 0$ zu ihrem Kehrwert w = 1/z heisst Inversion:

$$\boxed{z = r \cdot e^{j\varphi} \rightarrow w = \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right) \cdot e^{-j\varphi}}$$

Regel:
Vorzeichenwechsel im Argument,
Kehrwertbildung des Betrages von z.



Inversionsregeln für Ortskurven:

Für die in Anwendungen besonders häufig auftretenden Geraden und Kreise gelten die folgenden Inversionsregeln:

1. Gerade durch den Nullpunkt → Gerade durch den Nullpunkt
2. Kreis nicht durch den Nullpunkt → Kreis nicht durch den Nullpunkt
3. Gerade nicht durch den Nullpunkt → Kreis durch den Nullpunkt
4. Kreis durch den Nullpunkt → Gerade nicht durch den Nullpunkt
5. Mittelpunktkreis → Mittelpunktkreis

Der Punkt mit dem kleinsten Abstand (Betrag) von Nullpunkt führt zu dem Bildpunkt mit dem grössten Abstand (Betrag) und umgekehrt.

Ein Punkt oberhalb der reellen Achse führt zu einem Bildpunkt unterhalb der reellen Achse und umgekehrt.