Berner Fachhochschule

Hochschule für Technik
und Informatik HTI Burgdorf

Zusammenfassung

Elektrotechnik

Autor: Niklaus Burren
Datum: 8. September 2004

Inhalt

1. Elektrisches Feld 3

1.1. Grundlagen 3
1.1.1. Linienintegral 3
1.1.2. Flächenintegral 4

1.2. Stromdichtefeld 5
1.2.1. Stromdichte 5
1.2.2. Stromstärke 5

1.3. Feldstärke und Spannung im Strömungsfeld 5
1.3.1. Elektrische Feldstärke 5
1.3.2. Spannung und Potential 6
1.3.3. Ohmscher Widerstand beliebig geformerter Leiter 6

1.4. Elektrostatisches Feld 6
1.4.1. Definition 6
1.4.2. Verschiebungsdichte 6
1.4.3. Verschiebungsfluss 7
1.4.4. Gausssches Grundgesetz 7

1.5. Kondensator 8
1.5.1. Kapazität 8
1.5.2. Plattenkondensator 8
1.5.3. Koaxialkabel 8
1.5.4. Doppelleitung 8
1.5.5. Einfachleitung 8
1.5.6. Kugelkondensator 9

1.6. Energie und Kräfte im elktrostatischen Feld ... 9
1.6.1. Energie und Energiedichte ... 9
1.6.2. Kräfte im elektrostatischen Feld ... 10

2. Magnetsiches Feld ... 11

2.1. Grundlagen ... 11
2.1.1. Magnetsiche Flussdichte ... 11
2.1.2. Magnetischer Fluss ... 11

2.2. Kräfte im Magnetfeld ... 11
2.2.1. Lorentzkraft beim stromdurchflossenen Leiter ... 11
2.2.2. Lorentzkraft bei einer bewegten Ladung ... 12
2.2.3. Linke und rechte Handregel ... 12

2.3. Durchflutungsgesetz ... 12
2.3.1. Permeabilität ... 12
2.3.2. Magnetische Durchflutung ... 13
2.3.3. Magnetische Feldstärke ... 13
2.3.4. Mittlere Feldlinienlänge ... 13
2.3.5. Durchflutungssatz ... 14

2.4. Magnetischer Kreis ... 14
2.4.1. Ersatzschaltbild ... 14
2.4.2. Magnetische Durchflutung ... 14
2.4.3. Magnetischer Fluss ... 14
2.4.4. Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises ... 15
2.4.5. Magnetischer Widerstand ... 15

2.5. Induktionsgesetz ... 15
2.5.1. Bewegungsinduktion ... 15
2.5.2. Induktionsgesetz in allgemeiner Form ... 16

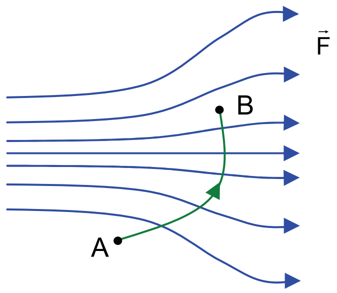
2.6. Selbstinduktion und Gegeninduktion ... 16
2.6.1. Selbstinduktion ... 16
2.6.2. Induktivität der langen Zylinderspule ... 17
2.6.3. Induktivität der Doppelleitung ... 17
2.6.4. Gegeninduktivität ... 17
2.6.5. Gesamtinduktivität gekoppelter Spulen ... 18

2.7. Transformator ... 19
2.7.1. Idealer Transformator ... 19
2.7.2. Impedanztransformation ... 19
2.7.3. Realer Transformator ... 19

1. Elektrisches Feld

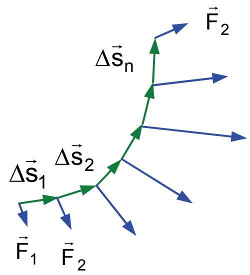
1.1. Grundlagen

1.1.1. Linienintegral



Das Linienintegral W des Vektorfeldes $\vec{F}$ entlang eines gegebenen Weges von A nach B lautet:

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

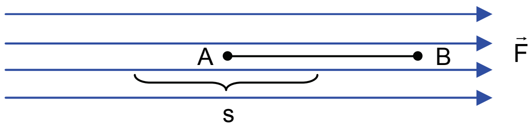


Man teilt den Weg auf in einzelne Wegstücklein Δs_i. Jedes Wegstücklein Δs_i wird skalar mit dem dazugehörigen Feldvektor F_i multipliziert.

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \rightarrow \Delta W_i = F_i \cdot \Delta s_i \cdot \cos(\alpha_i)$$

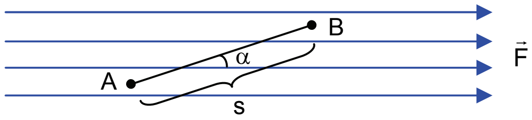
Spezialfälle

1. Feld homogen und Weg parallel zum Feld:



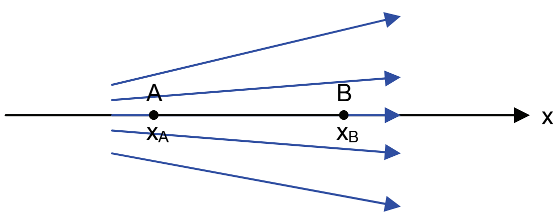
$$W = \int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = \int_A^B F\ ds = F \cdot \int_A^B ds = F \cdot s$$

2. Feld homogen und Weg in einem Winkel α zum Feld:



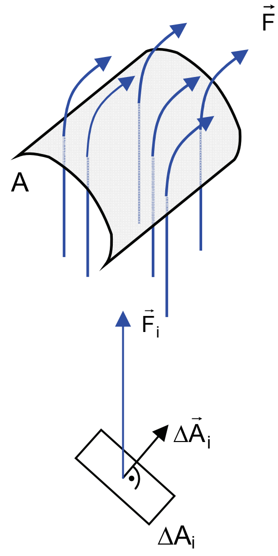
$$W = \int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = \int_A^B F\ ds \cdot \cos(\alpha) = F \cdot \cos(\alpha) \cdot \int_A^B ds = F \cdot s \cdot \cos(\alpha)$$

3. Feld inhomogen und Weg entlang einer geraden Feldlinie:



$$W = \int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\ dx$$ F(x) : Betrag von $\vec{F}$ ist eine Funtion von x.

1.1.2. Flächenintegral



Das Flächenintegral Ψ des Vektorfeldes $\vec{F}$ über einer gegebenen Fläche A lautet:

$$\boxed{\Psi = \int_A \vec{F}\,d\vec{A}}$$

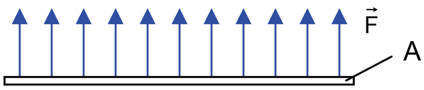
Man teilt die Fläche A in einzelne, ebene Flächenstücke ΔA_i auf.

Jedem Flächenstück ordnet maneinen Vektor $\Delta\vec{A}_i$ zu, der senkrecht darauf steht und dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt ΔA_i ist.

Jeder Flächenvektor $\Delta\vec{A}_i$ wird skalar mit dem dazugehörigen Feldvektor multipliziert.

Spezialfälle

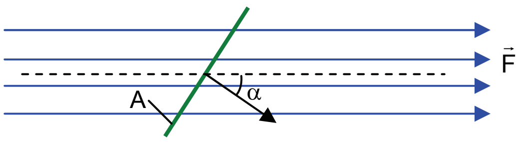
1. Feld homogen und ebene Fläche A senkrecht zum Feld



Da die Fläche senkrecht zu den Feldlinien steht verläuft der Flächenvektor $\Delta\vec{A}_i$ parallel zu den Feldlinien.

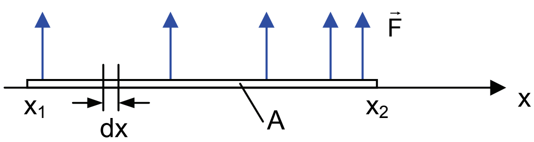
$$\Psi = \int_A \vec{F}\,d\vec{A} = \int_A F\,dA = F \cdot \int_A dA = F \cdot A$$

2. Homogenes Feld durch eine ebene Fläche



$$\Psi = \int_A \vec{F}\,d\vec{A} = \int_A F\,dA \cdot \cos(\alpha) = F \cdot \cos(\alpha) \cdot \int_A dA = F \cdot A \cdot \cos(\alpha)$$

3. Feld, das nur von einer Koordinate abhängt, und ebene Fläche senkrecht zum Feld (inhomogen):



Die Fläche A hat die Länge $x_2 - x_1$ und die Breite b.

$$\Psi = \int_A \vec{F}\,d\vec{A} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot b\;dx$$

1.2. Stromdichtefeld

1.2.1. Stromdichte

Die Vektorielle Grösse S nennt man Stromdichte. Sie hat die gleiche Richtung wie der Geschwindigkeitsvektor v_p der positiven Ladungen in eienm Stromdurchflossenen Leiter. Die Stromdichte ist ein Mass für die Ladungsträgerzahl, die pro Zeiteinheit durch ein Flächenelement fliesst.

$$\boxed{\vec{S} = e^+ \cdot n_p \cdot \vec{v}_p + e^- \cdot n_n \cdot \vec{v}_n} \qquad \boxed{S = \frac{I}{A}} \qquad \text{Einheit: } [\vec{S}] = \text{A/m}^2$$

e^+, e^-	=	Elementarladung $\pm 1.6 \cdot 10^{-19}$	[As]
n_p, n_n	=	Anzahl positiver/negativer Ladungsträger	
I	=	Strom	[A]
A	=	Leiterquerschnitt	[m^2]
$\vec{v}_p$	=	Geschwindigkeit der positiven Ladungsträger	[m/s]
$\vec{v}_n$	=	Geschwindigkeit der negativen Ladungsträger	[m/s]

1.2.2. Stromstärke

Fliesst durch ein Flächenelement da ein Strom mit der Stromdichte $\vec{S}$, so berechnet sich die dazugehörige Stromstärke wie folgt:

$$\boxed{I = \int_A \vec{S}\, d\vec{A}} \qquad \text{Einheit: } [I] = \text{A}$$

Ist die Flächenelement da senkrecht zum Stromdichtefeld $\vec{S}$ gilt: $dI = S \cdot da$

1.3. Feldstärke und Spannung im Strömungsfeld

1.3.1. Elektrische Feldstärke

Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ entspricht der Kraft $\vec{F}$, die auf eine betrachtete Ladung wirkt:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}} \qquad \text{Einheit: } [\vec{E}] = \text{V/m}$$

$\vec{F}$	=	Kraft auf Ladung	[N]
Q	=	Ladung	[As]

Die elektrische Feldstärke lässt sich aus der Stromdichte $\vec{S}$ und dem spezifischen Widerstand ρ berechnen:

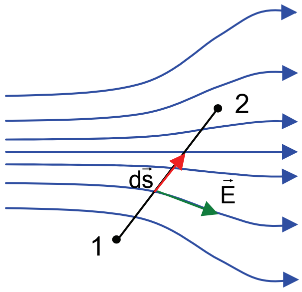
$$\boxed{\vec{E} = \rho \cdot \vec{S}} \qquad \text{Einheit: } [\vec{E}] = \text{V/m}$$

$\vec{S}$	=	Ladung	[As]
ρ	=	Spezifischer Widerstand	[($\Omega \cdot mm^2$)/m]

Man nennt diese Gleichung auch allgemeines Ohmsches Gesetz oder das ohmsche Gesetz in differentieller Form. Es sagt aus, dass in einem leitenden Medium Feldstärke und Stromdichte zueinander proportional sind.

1.3.2. Spannung und Potential

Die elektrische Spannung U zwischen zwei Punkten 1 und 2 ist allgemein als Linienintegral des elektrischen Feldes definiert. Dabei spielt es keine Rolle, entlang welchen Weges zwischen 1 und 2 integriert wird:



$$\boxed{U = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s}}$$ Einheit: [U] = V

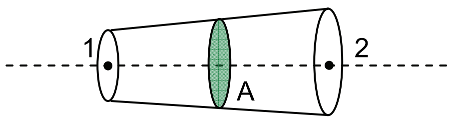
Das Umlaufintegral $\oint \vec{E}\, d\vec{s} = 0$ der elektrischen Feldstärke ist Null oder die Summe der Spannungen entlang einer Masche ist null (2. Kirschhoffsches Gesetz).

1.3.3. Ohmscher Widerstand beliebig geformerter Leiter

Der ohmsche Widerstand eines beliebig geformten Leiters berechnet sich demnach nach der Formel:

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s}}{\int_A \vec{S}\, d\vec{A}}}$$ Einheit: [R] = Ω

Beispiel:



1.4. Elektrostatisches Feld

1.4.1. Definition

Unter einem elektrostatischen Feld versteht man ein **zeitunabhängiges, elektrisches Feld** in einem Isolator. Die Ursache für das elektrostatische Feld sind **ruhende Ladungen**. Die elektrischen Feldlinien beginnen auf positiven und enden auf negativen Ladungen. Man spricht bei einem elektrostatischen Feld auch von einem **Quellenfeld**. Die positiven Ladungen sind die Quellen und die negativen die Senken des Feldes.

1.4.2. Verschiebungsdichte

Leitender Körper im elektrischen Feld

Die Fähigkeit eines elektrischen Feldes Ladungen zu verschieben wird durch die Verschiebungsdichte D beschrieben:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}}$$ $[\vec{D}] = As/m^2$

$\vec{E}$	=	Elektrisches Feld	[V/m]	
ε_0	=	Elektrische Feldkonstante	[As/Vm]	($8.8542 \cdot 10^{-12}$ As/Vm)

Da $\vec{E}$ ein Vektor ist, ordnet man auch D einen Vektor zu, der die selbe Richtung wie $\vec{E}$ hat.

Dielektrikum im elektrischen Feld

Wird ein Dielektrikum in das elektrostatische Feld E_0 gebracht wird dieses polarisiert, so dass das Feld E_0 geschwächt wird. Im Innern des Dielektrikums herscht das Feld E wobei gilt $E < E_0$.
Das Verhältnis zwischen der Feldstärke E_0 ohne Dielektrikum und E mit Dielektrikum heisst Permitivitätszahl:

$\boxed{\varepsilon_r = \frac{E_0}{E}}$ Somit gilt für die Verschibungsdichte: $\vec{D} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$

Das Produkt $\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ nennt man Permitivität ε:

$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}}$ $[\vec{D}] = \mathrm{As/m^2}$

$\vec{E}$	=	Elektrisches Feld im Dielektrikum	[V/m]	
$\vec{E}_0$	=	Elektrisches Feld ausserhalb des Dielektrikum	[V/m]	
ε_0	=	Elektrische Feldkonstante	[As/Vm]	($8.8542 \cdot 10^{-12}$ As/Vm)
ε_r	=	Permitivitätszahl	[As/Vm]	
ε	=	Permitivität	[As/Vm]	

Beispiele

Stoff	Permitivitätszahl ε_r
Luft	1.00059
Glimmer	6...8
Glas	5...12
Keramik	10000...50000
Dest. Wasser	2.6
Bariumtitanat	1000

1.4.3. Verschiebungsfluss

Integriert man das $\vec{D}$-Feld über einer gegebenen Fläche A, dann erhält man den Verschiebungsfluss:

$\boxed{\psi = \int_A \vec{D}\, d\vec{A}}$ $[\psi] = \mathrm{As}$

Wird das $\vec{D}$-Feld über einer Hüllfläche integriert spricht man vom Hüllfluss:

$\boxed{\psi = \oint_A \vec{D}\, d\vec{A}}$ $[\psi] = \mathrm{As}$

1.4.4. Gausssches Grundgesetz

Das Gaussche Grundgesetz besagt, dass der Verschiebungsfluss ψ durch eine Hüllfläche gleich der in der Hüllfläche eingeschlossenen Ladung Q ist:

$\boxed{\psi = Q}$

1.5. Kondensator

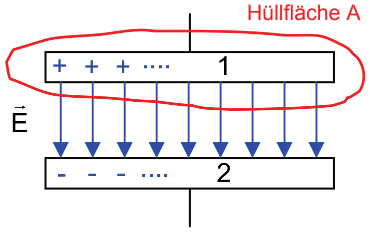
1.5.1. Kapazität

Die Kapazität sagt aus, wieviel Ladung Q pro 1 Volt Spannung gespeichert werden kann. Die Kapazität lässt sich über das Gausssche Grundgesetz und die Definition der Spannung berechnen:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_A \vec{D}\, d\vec{A}}{\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s}}} \qquad [C] = F$$

1.5.2. Plattenkondensator

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d}} \qquad [C] = F$$



A	=	Wirksame Oberfläche	$[m^2]$
d	=	Plattenabstand	[m]

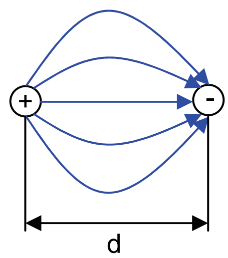
1.5.3. Koaxialkabel

$$\boxed{C = \frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}} \qquad [C] = F$$

r_a	=	Aussenradius	[m]
r_i	=	Innenradius	[m]

1.5.4. Doppelleitung

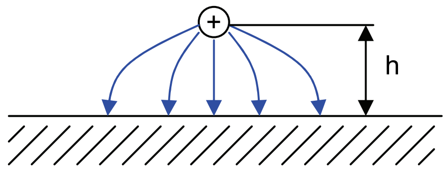
$$\boxed{C = \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l}{\ln\left(\frac{d}{r}\right)}} \qquad [C] = F$$



l	=	Leiterlänge	[m]
d	=	Leiterabstand	[m]
r	=	Leiterradius	[m]

1.5.5. Einfachleitung

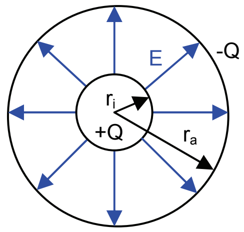
$$\boxed{C = \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l}{\ln\left(\frac{2 \cdot h}{r}\right)} \cdot 2} \qquad [C] = F$$



l	=	Leiterlänge	[m]
h	=	Abstand zur Fläche (Boden)	[m]
r	=	Leiterradius	[m]

ε_0	=	Elektrische Feldkonstante	[As/Vm]	$(8.86 \cdot 10^{-12}$ As/Vm)
ε_r	=	Permetivitätszahl	[As/Vm]	

1.5.6. Kugelkondensator



$$\boxed{C = \frac{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r_a \cdot r_i}{r_a - r_i}}$$ [C] = F

r_a = Radius der Hülle [m]
r_a = Radius der Ladung [m]

ε_0 = Elektrische Feldkonstante [As/Vm] ($8.86 \cdot 10^{-12}$ As/Vm)
ε_r = Permetivitätszahl [As/Vm]

1.6. Energie und Kräfte im elktrostatischen Feld

1.6.1. Energie und Energiedichte

Die Energie eines geladenen Kondensators wird wie folgt berechnet:

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}$$ $[W_E]$ = Ws

C = Kapazität [F]
U = Spannung [V]

Die Energie ist im elektrischen Feld E gespeichert. Da die Energie im Feld und somit im Raum gespeichert ist, kann man meine eine Energie dichte W_E definieren:

$$\boxed{w_E = \frac{dW_E}{dV}}$$ $[w_E] = Ws/m^3$

w_E ist die Energie pro Volumeneinheit. Die Energiedichte eines Plattenkondenstors kann wie folgt berechnet werden:

$$W_E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \quad \text{mit} \quad C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d} \quad \text{und} \quad U = E \cdot d$$

$$W_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d} \cdot (E \cdot d)^2 \Rightarrow W_E = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E^2 \cdot V \Rightarrow \underline{\underline{\frac{dW_E}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E^2}}$$

A = Wirksame Oberfläche $[m^2]$
d = Plattenabstand [m]
ε_0 = Elektrische Feldkonstante [As/Vm] ($8.86 \cdot 10^{-12}$ As/Vm)
ε_r = Permetivitätszahl [As/Vm]

Die Feldenergie W_E in einem Volumen V erhält man durch entsprechende Volumenintegration:

$$\boxed{W_E = \int_V w_E \, dV = \iiint w_E \, dV}$$ $[W_E]$ = Ws

1.6.2. Kräfte im elektrostatischen Feld

Ein elektrisches Feld übt auf eine Ladung eine Kraft aus. Ist die Ladung punktförmig berechnet sich die Kraft wie folgt:

Mechanische Arbeit $W = S \cdot F$

Elektrische Arbeit $W = P \cdot t = U \cdot I \cdot t = u \cdot \frac{Q}{t} \cdot t = U \cdot Q$

$S \cdot F = U \cdot Q$

$F = \frac{U \cdot Q}{S} \rightarrow E$

$\boxed{\vec{F} = \vec{E} \cdot Q}$

2. Magnetsiches Feld

2.1. Grundlagen

2.1.1. Magnetsiche Flussdichte

Die Magnetische Flussdichte gibt an, wie stark der Raum an einer bestimmten Stelle vom Magnetfeld durchsetzt ist.

Magnetische Flussdichte in Vakuum oder Luft.

$\boxed{B = \mu_0 \cdot H}$ [B] = N/Am = Vs/m^2 = T (Tesla)

Magnetische Flussdichte mit beliebigem Kernmaterial.

$\boxed{B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H}$ [B] = N/Am = Vs/m^2 = T (Tesla)

H	=	Magnetische Feldstärke	[A/m]	
μ_0	=	Magnetische Feldkonstante	[Vs/Am]	$1{,}2566 \cdot 10^{-6}$
μ_r	=	Permeabilitätszahl		

2.1.2. Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss Φ durch die Fläche A erhält man, wenn man $\vec{B}$ über diese Fläche integriert:

$\boxed{\Phi = \int_A \vec{B}\, d\vec{A}}$ [Φ] = Vs

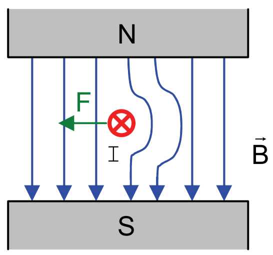
Das Magnetfeld hat geschlossene Feldlinien und ist Quellenfrei.
Deshalb ist der magnetische Fluss durch eine Hüllfläche null:

$\boxed{\oint_A \vec{B}\, d\vec{A} = 0}$

2.2. Kräfte im Magnetfeld

2.2.1. Lorentzkraft beim stromdurchflossenen Leiter

Die Kraft $\vec{F}$ wirkt in Richtung des geschwächten Feldes und wird wie folgt berechnet:



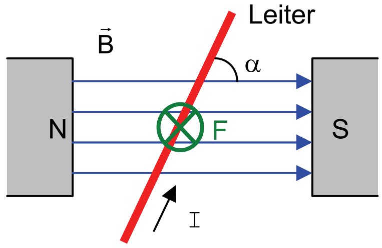
$\boxed{\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})}$ [F] = N

I	=	Strom durch den Leiter	[A]
$\vec{B}$	=	Äusseres Magnetfeld	[T]
$\vec{l}$	=	Vektor der Länge l mit Richtung des Stromes	[m]

Die Kraft die auf den Leiter wirkt steht senkrecht zur Fläche, welche von den beiden Vektoren $\vec{B}$ und $\vec{l}$ aufgespannt wird.

Daraus folgt für den Betrag F der Kraft:

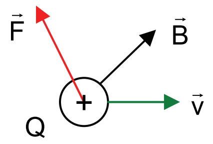
$\boxed{F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin(\alpha)}$ [F] = N



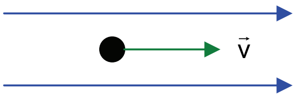
2.2.2. Lorentzkraft bei einer bewegten Ladung

Bewegt sich eine Ladung Q mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Magnetfeld $\vec{B}$, dann erfährt sie eine Kraft $\vec{F}$, die man Lorentzkraft nennt:

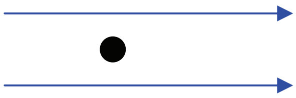
$$\boxed{\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}$$



Spezialfälle

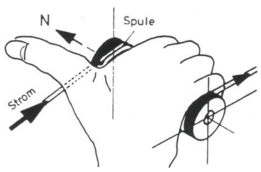


$\vec{v} \,//\, \vec{B} \Rightarrow F = 0$



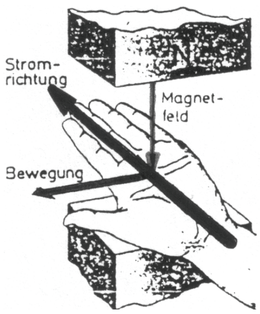
$\vec{v} = 0 \Rightarrow F = 0$

2.2.3. Linke und rechte Handregel



Rechte Handregel

Man hält die rechte Hand so, dass unsere Finger in Richtung des Stromes in den einzelnen Windungen zeigen. Dann zeigt der Daumen zum Nordpol der Spule



Linke Handregel

Mit Hilfe der linken Handregel (Motorregel), lässt sich die Ablenkungsrichtung eines stromdurchflossenen Leiters aufgrund der Lorenzkraft bestimmen.
Man halte die linke Hand so, dass die Feldlinien in die Handfläche eintreten. Die Finger zeigen die Stromrichtung an. Der Daumen zeigt die Bewegungsrichtung des Leiters an.

2.3. Durchflutungsgesetz

2.3.1. Permeabilität

Das Umlaufintegral des magnetischen Feldes $\vec{B}$ eines stromdurchflossenen Leiters ist gleich dem Strom I mal die Permeabilität μ:

$$\boxed{\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu \cdot I}$$

μ ist abhängig vom Material, das den Feldraum ausfüllt. Für Vakuum und angenähert für Luft gilt:
$\mu = \mu_0 = 1.2566 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Vs/Am}$

μ_0 nennt man magnetsiche Feldkonstante oder absolute Permeabilität. Die Permeabilität μ wird als Produkt von μ_0 und einer dimensionslosen Konstanten μ_r, die den Einfluss eines homogenen Materials im Feldraum berücksichtigt, gebildet:

$$\boxed{\mu = \mu_r \cdot \mu_0}$$

2.3.2. Magnetische Durchflutung

Allgemein

Die Durchflutung Θ wird wie folgt definiert:

$$\boxed{\Theta = \int_A \vec{S}\, d\vec{A}} \qquad [\Theta] = A$$

$\vec{S}$ = Stromdichte [A/m²]
A = Fläche [m²]

Wobei die Fläche A der vom Integrationsweg umschlossenen Fläche entspricht.

Für Spulen

$$\boxed{\Theta = N \cdot I} \qquad [\Theta] = A$$

I = Spulenstrom [A]
N = Windungen

2.3.3. Magnetische Feldstärke

Allgemein

Mit Hilfe von μ lässt sich aus $\vec{B}$ die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ definieren:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}} \qquad [\vec{H}] = A/m$$

$\vec{B}$ = Magnetische Flussdichte [T]
μ = Permeabilität [Vs/Am]

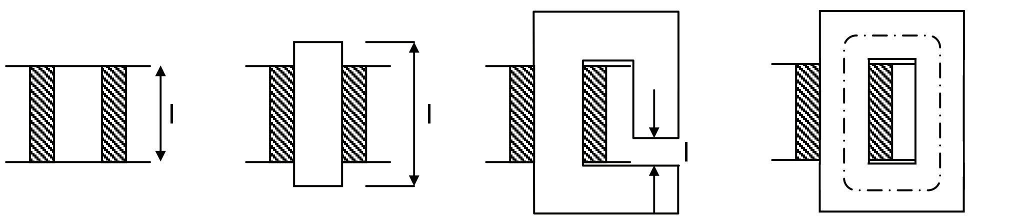
Für Spulen

$$\boxed{H = \frac{N \cdot I}{l_m} = \frac{\Theta}{l_m}} \qquad [\vec{H}] = A/m$$

l_m = Mittlere Feldlinienlänge [m]
I = Spulenstrom [A]
N = Anzahl Windungen

2.3.4. Mittlere Feldlinienlänge

Einige Beispiele zur vereinfachten Bestimmung der mittleren Feldlinienlänge:



l = Spulenlänge | l = Kernlänge | l = mittlere Luftspaltbreite | l = mittlere Kernlänge

2.3.5. Durchflutungssatz

Mit der magnetischen Feldstärke H und der Definition der Permeabiltät, lässt sich der Durchflutungssatz wie folgt definieren:

mit $\oint \vec{B}\ d\vec{s} = \mu \cdot I$ und $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ → $\boxed{\oint \vec{H}\ d\vec{s} = I}$

Allgemeine Form des Durchflutungssatz

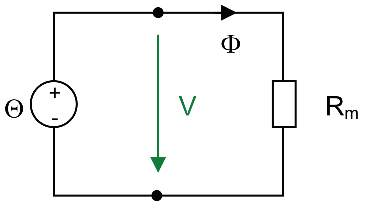
$$\boxed{\oint \vec{H}\ d\vec{s} = \int_A \vec{S}\ d\vec{A}}$$

Man bezeichnet das Wegintegral $\int_1^2 \vec{H}\ d\vec{s}$ als magnetische Spannung V und das Umlaufintegral $\oint \vec{H}\ d\vec{s}$ als magnetische Umlaufspannung $\overset{\circ}{V}$, dann kann man den Durchflutungssatz wie folgt definieren:

$$\boxed{\overset{\circ}{V} = \Theta}$$

2.4. Magnetischer Kreis

2.4.1. Ersatzschaltbild



Im Gegensatz zum Ohmschen Wiederstand ist der magnetische Widerstand R_m bei ferromagnetischem Material nicht linear.

2.4.2. Magnetische Durchflutung

$\boxed{\Theta = H \cdot l_m = \frac{B}{\mu} \cdot l_m}$ $[\Theta] = A$

l_m	=	Mittlere Feldlinienlänge	[m]	(siehe Kap. 2.3.4)
H	=	Magnetische Feldstärke	[A/m]	
μ	=	Permeabilität	[Vs/Am]	

2.4.3. Magnetischer Fluss

$\boxed{\Phi = \frac{\mu \cdot A}{l_m} \cdot \Theta}$ $[\Phi] = Vs$

Θ	=	Magnetische Durchflutung	[A]	
l_m	=	Mittlere Feldlinienlänge	[m]	(siehe Kap. 2.3.4)
A	=	Querschnittfläche	[m^2]	

(Vergleich Strom als Produkt von Stromdichte und Leiterquerschnitt)

$\boxed{\Phi = B \cdot A}$ $[\Phi] = Vs$

Φ	=	Magnetischer Fluss	[wb] Weber
B	=	Magnetische Flussdichte	[T]
A	=	Fläche	[m^2]

2.4.4. Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises

$$\boxed{R_m = \frac{\Theta}{\Phi}} \qquad [R_m] = A/Vs$$

Θ	=	Magnetische Durchflutung	[Aw]
Φ	=	Magnetischer Fluss	[wb] Weber

2.4.5. Magnetischer Widerstand

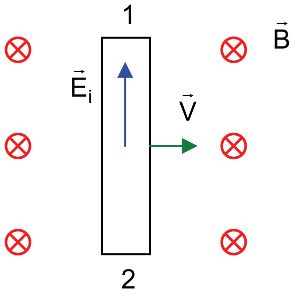
$$\boxed{R_m = \frac{l_m}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}} \qquad [R_m] = A/Vs$$

$$\boxed{\Lambda = \frac{1}{R_m} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{l_m}} \qquad [\Lambda] = Vs/A$$

l_m	=	Mittlere Feldlinienlänge	[m]
A	=	Kernquerschnitt	[m^2]
μ_0	=	Magnetische Feldkonstante	[Vs/Am] $1{,}257 \cdot 10^{-6}$
μ_r	=	Permeabilitätszahl	

2.5. Induktionsgesetz

2.5.1. Bewegungsinduktion



Bewegt man einen Leiter durch ein Magnetfeld wird im Innern des Leiters das elektrische Feld E_i induziert:

$$\vec{E}_i = \vec{V} \times \vec{B}$$

Dieses Feld verschiebt die beweglichen Ladungen (im Beispeil pos. Ladungen nach 1 und neg. Ladungen nach 2). Es wird eine Spannung U_Q induziert:

$$\boxed{U_Q = \int_1^2 -(\vec{V} \times \vec{B})\, d\vec{s}} \qquad [U_Q] = V$$

Falls $\vec{V}$ und $\vec{B}$ örtlich konstant sind (d.h. $\vec{V}$ und $\vec{B}$ homogen) gilt:

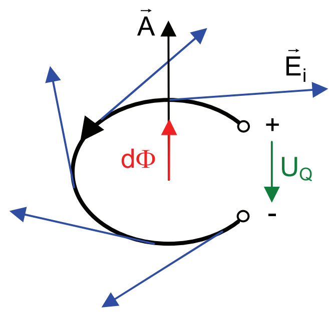
$$\boxed{U_Q = -(\vec{V} \times \vec{B})\, \vec{l}} \qquad [U_Q] = V$$

Bei Leerlauf oder Bei Vernachlässigung des Leiterwiderstandes ist die Klemmenspannung U_{12} gleich der induzierten Quellenspannung U_Q.

$$\boxed{U_Q = U_{12}}$$

B	=	Magnetische Flussdichte	[T]
V	=	Geschwindigkeit des Leiters	[m/s]
l	=	Länge	[m]
s	=	Weg zwischen 1 und 2	[m]

2.5.2. Induktionsgesetz in allgemeiner Form



Betrachtet wird eine Leiterschleife, die eine Fläche A umschliesst. Man ordnet der Schleife einen Flächenvektor A zu, der senkrecht auf der Fläche steht. Anschliessend gibt man der Schleife entsprechend der rechten Handregel eine Umlaufrichtung.

Wird die Schleife von einem Magnetfeld B durchdrungen wird der Fluss Φ verursacht:

$$\Phi = \int_A \vec{B}\, d\vec{A}$$

Gemäss dem Induktionsgesetz induziert der sich ändernde Fluss auf dem Windungsumlauf eine elektrische Feldstärke E_i für deren Umlaufintegral gilt (Integrationsrichtung = Umlaufrichtung der Schleife):

$$\oint \vec{E}_i\, d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\, d\vec{A}$$

Die induzierte Spannung berechnet sich also nach folgender Formel:

$$\boxed{u_Q = \frac{d\Phi}{dt}} \quad [U_Q] = V$$

Wird der Fluss Φ N-mal von der Leiterschleife umschlossen, so beträgt die induzierte Spannung u_Q:

$$\boxed{u_Q = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}} \quad [U_Q] = V$$

2.6. Selbstinduktion und Gegeninduktion

2.6.1. Selbstinduktion

Spulenfluss in einer Spule:

$$\boxed{\psi = N \cdot \Phi} \quad [\psi] = Vs$$

Φ	=	Magnetischer Fluss in einer Windung	[wb] Weber
N	=	Anzahl Windungen	

Ein sich ändernder Spulenfluss erzeugt in einer spule eine Induktionsspannung. Wird dieser Spulenfluss von einer angelegten Stromquelle erzeugt, dann wird ebenfalls eine Spannung induziert.

$$\boxed{u_L = \frac{d\psi}{dt}} \quad [u_L] = V$$

Man bezeichnet diese Erscheinung als Selbstinduktion. Der Spulenfluss ψ ist proportional zum Strom i:

$\boxed{\psi = L \cdot i}$ $[\psi] = Vs$

L	=	Induktivität	[H, Vs/A]
i	=	Strom	[A]

Der Proportionalitätsfaktor L nennt man Induktivität der Spule und ist von der Geometrie der Drahtanordnung und den Materialeigenschaften abhängig.

Aus dem Induktionsgesetz ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an einer Induktivität:

$$\boxed{u_L = L \cdot \frac{di}{dt}} \qquad [u_L] = V$$

L	=	Induktivität	[H, Henri]
di	=	Stromänderung	[A]
dt	=	Zeitänderung	[s]

2.6.2. Induktivität der langen Zylinderspule

$$\boxed{L = \frac{N^2 \cdot \mu \cdot A}{l}} \qquad [L] = H$$

A	=	Spulenquerschnitt	$[m^2]$
l	=	Länge der Spule	[m]
N	=	Anzahl Windungen	
μ	=	Permeabilität	[Vs/Am]

2.6.3. Induktivität der Doppelleitung

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{2a - r}{r}\right)} \qquad [L] = H$$

μ_0	=	Magnetische Feldkonstante	[Vs/Am]	$1{,}2566 \cdot 10^{-6}$
l	=	Länge der Doppelleitung	[m]	
a	=	Halber Abstand zischen den Leitern	[m]	
r	=	Leitungsradius	[m]	

2.6.4. Gegeninduktivität

Fliesst durch zwei gekoppelte Spulen ein Strom, dann überlagern sich die Felder und deren Flüsse linear und entsprechend auch die Spannungen:

$$u_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi_{11}}{dt} + N_1 \cdot \frac{d\Phi_{12}}{dt} \qquad u_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi_{21}}{dt} + N_2 \cdot \frac{d\Phi_{22}}{dt}$$

u_1	=	Spannung an Spule 1	[V]
u_2	=	Spannung an Spule 2	[V]
N_1	=	Windungszahl Spule 1	
N_2	=	Windungszahl Spule 2	

Φ_{11} = Fluss durch Spule 1 [wb]
Φ_{21} = Streufluss von Spule 1 [wb]
Φ_{22} = Fluss durch Spule 2 [wb]
Φ_{12} = Streufluss von Spule 2 [wb]

Die Flüsse Φ_{11} und Φ_{21} sind zum Strom i_1 und die Flüsse Φ_{12} und Φ_{22} sind zum Strom i_2 proportional:

$$u_1 = L_{11} \cdot \frac{di_1}{dt} + L_{12} \cdot \frac{di_2}{dt} \qquad u_2 = L_{21} \cdot \frac{di_1}{dt} + L_{22} \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Die Proportionalitätsfaktoren L_{11} und L_{22} sind die Induktivitäten L_1 und L_2 der Spulen. Analog dazu bezeichnet man L_{12} und L_{21} als Gegeninduktivitäten.

Gegeninduktivität M

Man kann zeigen, dass die Gegeninduktivitäten L_{12} und L_{21} gleich gross sind. Sie werden deshalb häufig als Gegeninduktivität M bezeichnet:

$$\boxed{M = L_{12} = L_{21}}$$

Kopplungsfaktor k

Daraus lässt sich der Kopplungsfaktor k ableiten:

$$\boxed{k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}}$$

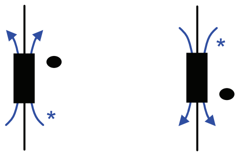
k ist ein Mass für den Kopplungsgrad und bei idealer Kopplung den Betrag 1. Bei $|k| \approx 1$ spricht man von fester Kopplung und bei $|k| < 0.8$ von loser Kopplung. Zur Markierung des gleichen Wicklungssinns der Spulen, werden Wicklungspunkte verwendet. Die Spulen sind gleichsinnig gekoppelt (d.h. k positiv), wenn die Stromzählpfeile bei den Wicklungpunkten gleiche Richtung haben.

2.6.5. Gesamtinduktivität gekoppelter Spulen

Sind zwei Spulen oder Induktivitäten magnetisch gekoppelt, so erzeugt jede Spule ein Magnetfeld, das die andere Spule durchsetzt. Sind beide beide Felder gleichgerichtet, so verstärken sie sich und die Gesamtinduktivität wird erhöht. Sind sie entgegengesetzt gerichtet, so schwächen sie sich und die Gesamtinduktivität wird kleiner.

Bei gleichgerichteten Magnetfeldern $\boxed{L_{Tot} = L_1 + L_2 + 2M}$

Bei entgegengesetzten Magnetfeldern $\boxed{L_{Tot} = L_1 + L_2 - 2M}$



Symbolik

Der Punkt gibt den Wicklungssinn an.

* Megnetfeldlinien

2.7. Transformator

2.7.1. Idealer Transformator

Beim Idealen Transformator sind die Streuflüsse Null, daher gibt es nur einen gemeinsamen Fluss Φ, der beide Spulen durchsetzt. Daraus folgt:

$$u_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{und} \quad u_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

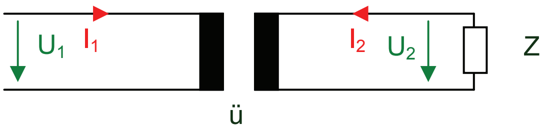
Spannungsverhältnis: $\boxed{\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2}}$

Stromverhältnis: $\boxed{\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1}}$

Übersetzungsverhältnis: $\boxed{ü = \frac{N_1}{N_2}}$

$$\boxed{\underline{U}_1 = ü \cdot \underline{U}_2 \quad \text{und} \quad \underline{I}_1 = -\frac{1}{ü} \cdot \underline{I}_2}$$

2.7.2. Impedanztransformation



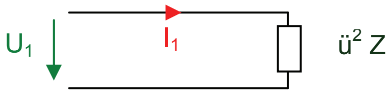
Für die Sekundärseite gilt:

$$Z = \frac{U_2}{-I_2}$$

Für die Primärseite gilt dann:

$$Z = \frac{\frac{U_1}{ü}}{ü \cdot I_1} \rightarrow \boxed{ü^2 \cdot Z = \frac{U_1}{I_1}}$$

Ersatzschaltbild:



2.7.3. Realer Transformator

Beim realen Transformator sind die Wicklungsdrähte Wiederstandsbehaftet (R_1, R_2). Es treten Streuflüsse (Φ_{S1}, Φ_{S2}) auf und der magnetische Widerstand ist nicht vernachlässigbar. Daraus folgt:

$$\boxed{u_1 = R_1 \cdot i_1 + N_1 \cdot \frac{d}{dt}(\Phi_{S1} + \Phi_h) \qquad u_2 = R_2 \cdot i_2 + N_2 \cdot \frac{d}{dt}(\Phi_{S2} + \Phi_h)}$$

Φ_h = Hauptfluss durch beide Spulen
i_1, i_2 = Spulenströme